Programme de colle : Semaine 20
Lundi 11 Mars

1 Cours

1. Polynômes
   — Définition d'un polynôme en tant que fonction polynomiale de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   — Unicité des coefficients.
   — Définition du degré et règle de calculs.
   — Dérivée d'un polynôme, dérivée $n-$iéme. Formule pour $(X^n)^{(p)}$
   — Racine et notion de divisibilité entre polynômes. r racine de $P \iff$ il existe Q tel que $P = (X - \alpha)Q$
   — Inégalité entre nombre de racines et degré.
   — Multiplicité d'une racine.
   — Théorème de d'Alembert-Gauss (Hors-programme normalement en première année...), factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
   — Egalité entre nombre de racines comptées avec multiplicité et degré.
   — Lien coefficients-racines. z_1, z_2 sont racines de $aX^2 + bX + c$ ($a \neq 0$) si et seulement si $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
2. Probabilités
   — Univers, événements. (Seuls les univers de cardinal fini sont au programme de BCPST1). Évènements incompatibles, événements contraires, événement certain.
   — Définition d'une probabilité. Exemple : probabilité uniforme.
   — Système complet d'événements. Formule des probabilités totales.
   — Probabilité conditionnelle, Formule de Bayes, Formule des proba totales version probabilité conditionnelle. Formule des probabilité composée.
   — Indépendance de deux événements et indépendance mutuelle entre n événements.
3. Informatique
   (a) Parcours de listes.
   (b) Modélisation d'une expérience aléatoire a l'aide de de la bibliothèque `random` plus particulièrement des fonctions `randint()` et `random`

2 Exercices Types

Exercice 1. *Simplifier le polynôme* $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k$.

Exercice 2. *Montrer qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Exercice 3. *Déterminer tous les polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *qui vérifient* $P(X) = P(X + 1)$

Exercice 4. *On définit une suite de polynômes* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par :* $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \dfrac{X^2}{4}\right) P_n. \end{cases}$

1. *Calculer* P_2 *et* P_3.
2. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, P_n *est de degré inférieur ou égal à* n.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on note* a_n *le coefficient d'indice* n *de* P_n.
   (a) *Donner les valeurs de* $a_0,\ a_1,\ a_2$ *et* a_3.

(b) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$.
En déduire une expression de a_n *en fonction de* n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *puis le degré du polynôme* P_n.

Exercice 5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. *Exprimer de deux façons différentes le coefficient de* X^n *dans le polynôme :* $P = (1+X)^n(1+X)^n$.
2. *En déduire l'expression de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6. *Soit* $n \geq 2$, *on pose* $P = (X+1)^n - 1$.

1. *Déterminer toutes les racines de* P *dans* $\mathbb{C}$ *et en déduire la factorisation de* P *dans* $\mathbb{C}$.
2. *On note* Q *le polynôme de* $\mathbb{C}$ *tel que :* $P = XQ$. *À l'aide des racines de* Q, *déterminer la valeur de :*
$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 7. *Expression de sommes.*

1. *Trouver un polynôme* P *de degré 3 tel que :* $P - P(X+1) = X^3$.
En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Montrer qu'il existe un polynôme* P *de degré 4 tel que :* $P(X+1) - P = X(X-1)(X-2)$
En déduire pour tout $n \geq 1$ *une expression simple de* $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

Exercice 8. *On représente informatiquement un polynôme sous forme d'une liste de ses coefficients ie.* `[a0,a1, ... ,an]` *représente le polynôme* $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

- *Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste* `P` *correspondant à un polynôme* P *et un flottant* `x` *et retourne la valeur de* $P(x)$
- *Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste* `P` *correspondant à un polynôme* P *et retourne son degré. (attention aux derniers coefficients qui peuvent être nuls...)*
- *Ecrire une fonction Python qui prend en argument deux listes* `P1,P2` *correspondant à deux polynômes* P_1, P_2 *et qui retourne la liste correspondant au polynômes* $P_1 + P_2$ *(attention aux tailles des deux listes)*

Exercice 9. *Dans une population,* 45% *des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune,* 60% *sont vaccinés contre la diphtérie et* 30% *contre les 2 maladies. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit vacciné contre aucune de ces deux maladies ?*

Exercice 10. *On choisit 5 cartes au hasard et simultanément dans un jeu de 32 cartes. Donner les probabilités d'avoir*

1. *5 cartes de la même couleur ;*
2. *(2 as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois) ;*
3. *(au moins un as) et (deux rois exactement).*

Exercice 11. *Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs* A *et* B. *Au jour 0, elle va à la fleur* A. *À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité* $p \in]0,1[$ *qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier* n, *on note* A_n *l'événement « l'abeille est sur la fleur* A *le jour* n »*et* B_n *l'événement « l'abeille est sur la fleur* B *le jour* n ». *On pose de plus* $a_n = P(A_n)$ *et* $b_n = P(B_n)$.

1. *Pour tout entier* n, *exprimer* a_{n+1} *et* b_{n+1} *en fonction de* a_n *et* b_n.
2. *En remarquant que* $a_n + b_n = 1$, *déterminer les expressions explicites de* a_n *et* b_n.
3. *Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.*

Exercice 12. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons noirs. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à αk. Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.*

1. *Trouver la valeur de α.*
2. *Quelle est la probabilité de tirer un jeton blanc.*
3. *Le jeton pioché est blanc. Quelle est la probabilité que ce jeton proviennent du sac S_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé ?*

Exercice 13. *Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie α. Lors d'une épidémie, on constate que parmi les malades, il y a 20% de vaccinés. De plus, on constate que sur l'ensemble des vaccinés, il y a eu un malade sur 12. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade de α ?*

Exercice 14. *On contrôle séparément et de façon indépendante les trois dimensions d'un pavé. Les probabilités de rejet sont égales à 0.06 pour la longueur, 0.04 pour la largeur et 0.08 pour la hauteur. Le pavé est refusé dès qu'une de ses dimensions est rejetée. Quelle est la probabilité pour qu'un pavé soit refusé ?*