Correction - DM8

Exercice 1. Cet exercice propose d'étudier une suite de fractions rationnelles, c'est-à-dire des fonctions définies comme quotients de deux fonctions polynomiales. Plus précisément, on considère les suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_0 & = & 0 \\ Q_0 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{lcl} P_{n+1} & = & P_n + XQ_n \\ Q_{n+1} & = & Q_n - XP_n \end{array}\right.$$

et on note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ R_n : x \mapsto \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

1. Déterminer R_0, R_1, R_2 et R_3 ainsi que leurs domaines de défintion.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0)$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le domaine de définition de R_n est de la forme $\mathbb{R} \setminus E_n$ où E_n est un ensemble fini de nombres réels.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n + iP_n = (1 + iX)^n$.
5. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Ecrire le nombre complexe $(1 + i\tan(\theta))^n$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire que $P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$ et $Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$.
   (c) Justifier proprement que $E_n = \left\{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \mid m \text{ entier impair tel que } -n < m < n\right\}$.
   (d) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R_n(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
6. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe deux polynomes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et une fraction rationnelle $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ telle que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
   (a) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $(PQ_n - QP_n)(\tan(\theta)) = 0$.
   (b) En déduire que $PQ_n - QP_n = 0$ puis que $R = R_n$.

Correction 1.

1. Calculons tout d'abord P_i et Q_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_1 & = & P_0 + XQ_0 = X \\ Q_1 & = & Q_0 - XP_0 = 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} P_2 & = & P_1 + XQ_1 = 2X \\ Q_2 & = & Q_1 - XP_1 = 1 - X^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_3 & = & P_2 + XQ_2 = 3X - X^3 \\ Q_3 & = & Q_2 - XP_2 = 1 - X^2 - 2X^2 = 1 - 3X^2 \end{array}\right.$$

On obtient

$$R_0 = \frac{P_0}{Q_0} = 0 \quad \text{et} \quad R_1 = X \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{2X}{1 - X^2} \quad \text{et} \quad R_3 = \frac{3X - X^3}{1 - 3X^2}.$$

Les ensembles de définitions respectifs sont :

$$D_0 = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_1 = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_2 = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \quad \text{et} \quad D_3 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 1$. Pour $n = 0$ c'est vrai par définition de Q_0. L'hérédité se montre grâce à la relation de récurrence $Q_{n+1} = Q_n - XP_n$, en évaluant en 0 on obtient $Q_{n+1}(0) = Q_n(0) - 0P_n(0) = Q_n(0) = 1$.
3. L'ensemble de définition de R_n est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \,|\, Q_n(x) \neq 0\}$, le complémentaire des racines réelles de Q_n. Or un polynôme non-nul n'a qu'un nombre fini de racines. D'après la question précédente Q_n n'est pas le polynôme nul donc $E_n = \{Q_n(x) = 0\}$ est un ensemble fini.
4. On montre la proposition par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{K}(n)$: "$Q_n+iP_n = (1+iX)^n$".
   Pour $n = 0$ on a $Q_0 + iP_0 = 1$ par définition de Q_0 et P_0 et on a $(1 + iX)^0 = 1$. $\mathcal{K}(0)$ est donc vrai.

   On suppose que la propriété $\mathcal{K}(n)$ est vraie pour un certain entier n. On a alors $Q_{n+1} + iP_{n+1} = (Q_n - XP_n) + i(P_n + XQ_n)$ par définition des suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ On a donc

$$\begin{aligned} Q_{n+1} + iP_{n+1} &= (Q_n + iP_n) + X(iQ_n - P_n) \\ &= (Q_n + iP_n) + iX(Q_n + iP_n) \end{aligned}$$

   car $-1 = i^2$. En utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{n+1} + iP_{n+1} &= (1 + iX)^n + iX(1 + iX)^n \\ &= (1 + iX)(1 + iX)^n \\ &= (1 + iX)^{n+1} \end{aligned}$$

   La propriété $\mathcal{K}$ est donc héréditaire.

   Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. (a)

$$\begin{aligned} (1 + i\tan(\theta))^n &= \left(\frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^n \\ &= \left(\frac{\exp(i\theta)}{\cos(\theta)}\right)^n \\ &= \frac{\exp(in\theta)}{\cos^n(\theta)} \\ &= \frac{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \\ &= \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} + i\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \end{aligned}$$

   (b) En évaluant la relation obtenue à la question 5) en $\tan(\theta)$ on obtient :

$$Q_n(\tan(\theta)) + iP_n(\tan(\theta)) = (1 + i\tan(\theta))^n.$$

   Or d'après la question 6a) $(1 + i\tan(\theta))^n = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} + i\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$. On identifie ensuite partie réelle et partie imaginaire et on trouve

$$P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \quad \text{et} \quad Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}.$$

(c) On a vu à la question 3 que $E_n = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q_n(x) = 0\}$. Comme tan est une bijection $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in E_n$ il existe $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan(\theta)$. D'après la question 6)b) on a alors $x \in E_n$ si et seulement si $\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} = 0$ ce qui équivaut à $\cos(n\theta) = 0$, soit $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.
Ainsi $\theta \equiv \frac{\pi}{2n}\,[\frac{\pi}{n}]$ et comme $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\theta \in \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{2n} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

On trouve alors

$$\theta \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$\theta \in \left\{\frac{m\pi}{2n} \,|\, m \text{ impair}\right\} \cap]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$\theta \in \left\{\frac{m\pi}{2n} \,|\, -n < m < n,\ m \text{ impair}\right\}$$

La dernière égalité s'obtient en résolvant les inégalités : $-\frac{\pi}{2} < \frac{m\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$
En revenant à la variable x, on a :

$$x \in \{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \,|\, -n < m < n,\ m \text{ impair}\}$$

(d) Remarquons que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $\mathbb{R}_n\left(\tan\left(\theta\right)\right)$ est bien définie d'après la question précédente. On a ainsi, $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$,

$$\begin{aligned} R_n(\tan(\theta)) &= \frac{P_n(\tan(\theta)}{Q_n(\tan(\theta))} \\ &= \frac{\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}}{\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}} \\ &= \tan(n\theta) \end{aligned}$$

6. (a) $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, on a

$$R(\tan(\theta)) = R_n(\tan(\theta)$$

Donc,

$$\frac{P_n}{Q_n}(\tan(\theta)) = \frac{P}{Q}(\tan(\theta))$$

En multipliant de par et d'autres par $QQ_n(\tan(\theta))$ on obtient :

$$P_nQ(\tan(\theta)) = PQ_n(\tan(\theta))$$

et donc

$$(P_nQ - PQ_n)(\tan(\theta)) = 0$$

(b) Le polynome $P_nQ - PQ_n$ s'annule en une infinité de valeur d'après la question précédente, c'est donc le polynôme nul. Donc $P_nQ - PQ_n = 0$ (je n'ai pas 'simplifier' par $\tan(\theta)) \neq 0$, ici j'utilise quelque chose de complétement différent. On a évalué en $\tan(\theta)$ ce n'est pas un produit mais une composition)
On obtient donc $P_nQ = PQ_n$ (égalité entre polynomes) et donc $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P}{Q}$ (égalité entre fraction rationnelle).

Exercice 2. Roudoudou le hamster vit une vie paisible de hamster. Il a deux activités : manger et dormir... On va voir Roudoudou à 00h00 ($n = 0$). Il est en train de dormir.

— Quand Roudoudou dort à l'heure n, il y a 7 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 3 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

— Quand Roudoudou mange à l'heure n, il y a 2 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 8 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

On note D_n l'événement 'Roudoudou dort à l'heure n' et M_n 'Roudoudou mange à l'heure n'. On note $d_n = P(D_n)$ et $m_n = P(M_n)$ les probabilités respectives.

1. Justifier que $d_n + m_n = 1$.
2. Montrer rigoureusement que
$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$
3. Exprimer de manière similaire m_{n+1} en fonction de d_n et m_n.
4. Soit A la matrice
$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
Résoudre en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Calculer D^n où $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n + 2 & -2\,(1/2)^n + 2 \\ -3\,(1/2)^n + 3 & 2\,(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$.
9. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Correction 2.

1. D_n et M_n forment un système complet d'événements donc $d_n + m_n = 1$.
2. On cherche à calculer $d_{n+1} = P(D_{n+1})$ On applique la formule des probabilités totales avec le SCE (M_N, D_N)
$$\begin{aligned} d_{n+1} &= P(D_{n+1} \,|\, M_n)P(M_n) + P(D_{n+1} \,|\, D_n)P(D_n) \\ &= P(D_{n+1} \,|\, M_n)m_n + P(D_{n+1} \,|\, D_n)d_n \end{aligned}$$
L'énoncé donne : $P(D_{n+1} \,|\, M_n) = \frac{2}{10}$ et $P(D_{n+1} \,|\, D_n) = \frac{7}{10}$ et donc
$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$
3. On cherche à calculer $m_{n+1} = P(M_{n+1})$ On applique la formule des probabilités totales avec le SCE (M_N, D_N)
$$\begin{aligned} m_{n+1} &= P(M_{n+1} \,|\, M_n)P(M_n) + P(M_{n+1} \,|\, D_n)P(D_n) \\ &= P(M_{n+1} \,|\, M_n)m_n + P(M_{n+1} \,|\, D_n)d_n \end{aligned}$$
L'énoncé donne : $P(M_{n+1} \,|\, M_n) = \frac{8}{10}$ et $P(M_{n+1} \,|\, D_n) = \frac{3}{10}$ et donc
$$m_{n+1} = 0,3d_n + 0,8m_n$$

4. On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 7x+2y &= 10\lambda x \\ 3x+8y &= 10\lambda y \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} (7-10\lambda)x+2y &= 0 \\ 3x+(8-10\lambda)y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+(8-10\lambda)y &= 0 \\ (7-10\lambda)x+2y &= 0 \end{cases}$
$L_2 \leftarrow 3 * L_2 - (7-10\lambda)L_1$
$\iff \begin{cases} 3x+(8-10\lambda)y &= 0 \\ (-100\lambda^2+150\lambda-50)y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (7-10\lambda)x+2y &= 0 \\ (2\lambda^2-3\lambda+1)y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (7-10\lambda)x+2y &= 0 \\ (2\lambda-1)(\lambda-1)y &= 0 \end{cases}$
Le système est de Cramer pour $(2\lambda-1)(\lambda-1) \neq 0$ et l'unique solution est alors $(0,0)$.
Pour $\lambda = 1$ on obtient $\iff \begin{cases} -3x+2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$ et les solutions sont de la forme :

$$\{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient $\iff \begin{cases} 2x+2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$ et les solutions sont de la forme :

$$\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

5. Le determinant de P vaut $det(P) = 3+2 = 5 \neq 0$ donc P est inversible. Son inverse vaut

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Ce n'est que du calcul.
7. $$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   A prouver par récurrence ou dire que c'est du cours pour des matrices diagonales.
8. On prouve tout d'abord par récurrence que pour tout n : $Q(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$". Initialisation. La proposition est vraie pour $n = 0$ les deux cotés valent l'identité.
   On suppose $Q(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a $A^n = PD^nP^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= APD^nP^{-1} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \\ &= PD\,\mathrm{Id}\,D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

   Ensuite c'est du calcul.
9. Et d'après les questions 2 et 3 on a

$$A\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix}$$

et par récurrence

$$A^n \begin{pmatrix} d_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix}$$

D'après l'énoncé $d_0 = 1$ c'est l'événement certain. et donc

$$\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n + 2 \\ -3\,(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$$

En particulier

$$d_n = \frac{1}{5}(3\,(1/2)^n + 2)$$